



RIASSUNTO

DELL' OPERA

MATEMATICA

E PRECISAMENTE

DELLA

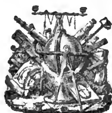
MISURA DELL'AJA DEL CERCHIO

COLL' AGGIUNTA DI DUE PROBLEMI E QUATTRO TEOREMI

DEL SACERDOTE

FRANCESCO OLIVA

DI BALVANO



NAPOLI

DALLA TIPOGRAFIA DI RAFFAELE PACI

1853

LIBRO PRIMO

RIASSUNTO DELL' OPERA MATEMATICA

E precisamente della misura dell' aia del cerchio colla giunta di due problemi, e quattro teoremi.

Articolo I.

Se due eguali rettilinee co' loro estremi si uniscono in modo, che cogli altri due estremi vengono unite colla terza ad una di esse eguale, si constituisce il triangolo equilatero: e se sei triangoli equilateri si uniscono in un centro, constituiscono l' esagono, che nell' aia del cerchio forma il primo grado sferico. Di vantaggio se nell' interno, e sopra un lato del quadrato vien innalzato un triangolo equilatero, questo secondo la dimostrazione, perde di altezza $^1/_8$, ed $^1/_{64}$ relativamente a quella del quadrato.

Art. II. D' intorno all' esagono v' è circoscritto il dodicagono, che ha parimenti un solo grado sferico. I gradi vengono classificati in sferici, e periferiaci: i primi sono nell'aia del cerchio ; i secondi nella periferia. I gradi sferici sono maggiori, e minori; i primi sono eguali ad un lato del quadrato del

avendo cento novantadue angoli, avià parimente 192 lati, che formano i gradi periferiaci, e ciascuno grado è eguale ad un lato de' quadrati del dodicagono ec. ed in conseguenza i gradi periferiaci per essere 192; n'avviene che la periferia del cerchio è di 192 gradi e la sua metà di 96.

Art. VIII. L'esagono ha un solo grado, come un solo ne ha il dodicagono; e l'uno, e l'altro formano due gradi sferici: due il ventiquattr' agono: quattro il quarantott' agono; otto il novantasei agono: sedici il cento novantadue agono, che uniti insieme dal centro alla periferia compongono di altezza 32 gradi sferici.

Art. IX. Dal centro alla periferia essendovi una perdita di altezza di 1/8, e di 1/64 avvenuta nel triangolo equilatero a cagione dell' inclinazione delle linee nella formazione dell' angolo: ed essendovi nel ventiquattr' agono un risecamento di una metà d' ottava, ed 1/2 di 1/64: un' altro risecamento di un quarto d' ottava, e di un quarto di 1/64 nel quarantott' agono: un'altro di mezzo quarto di ottava, e di un mezzo quarto di 1/64, ossia di 1/64, e di 1/8 nel novantasei-agono: un' altro di 1/2 di 1/64, e di 1/2 d' ottava nel cento novantadue agono: così 1/8, ed 1/64 + una metà d' ottava, ed 1/2 di 1/64 + un quarto d' ottava, ed un quarto di 1/64, ossia 2/64, e 2/8 + un mezzo quarto d' ottava, ed un mezzo quarto di 1/64, ossia di 1/64, e di 1/8

+ una metà di $^1/_{64}$, ed $^1/_2$ d'ottava: così tutte le perdite di altezza ammontano a $^2/_8$ del primo quadrato, ed $^1/_{64}$: ed a $^3/_8$ del secondo quadrato, e $^4/_{64}$

B

ottave:	sessant.:	ottave;	e sessant.:
1 :	1 :	0 :	0
	4 :	4 :	0
	2 :	2 :	0
	1 :	1 :	0
		4 :	4
2 :	1 :	3 :	4

Tutte queste frazioni si ravvisano situate nella tavola B, e sommate: ma s'avverte, che per essere stato diviso il quadrato in otto ottave, e ciascuna ottava in $^8/_{64}$: così l'intero di ciascuna ottava è di $^8/_{64}$, e non già di dieci: come per esempio nella fila delle sessantaquattresime vi sono $^4/_{64}$, e si segnano nella fila delle sessantaquattresime: poi si somma la fila delle ottave, e sono $^{11}/_8$, si segnano nella fila $^3/_8$, ed un'intero s'aggiunge alle sessantaquattresime, sommate, ammontano a $^9/_{64}$; una unità si segna nella fila, ed un'intero s'aggiunge all'altro intero, e si segnano $^2/_8$ (1).

Art. X. Abbiamo per l'articolo primo, che il triangolo equilatero perde di altezza

(1) S'avverte poi, che l'intero del primo quadrato è di dieci quantità, non già di otto.

vengono colla dimostrazione, innalzati otto gradi sferici, sette minori, ed uno maggiore: ed a proporzione del quarantott' agono, che perde di altezza un quarto d'ottava, ed un quarto di $^1/_{64}$ si farà un risecamento di un mezzo quarto d'ottava, e di un mezzo quarto di $^1/_{64}$, ossia di un secondo quadrato, e di $^1/_8$; ed avremo le basi de' triangoli isosceli, eguali al lato del quadrato, e così vien formato l'equilatero novantasei agono.

Art. VI. D' intorno al novantasei-agono vengono secondo la dimostrazione innalzati 16 gradi sferici, quindici minori, ed uno maggiore: tutti soprapposti l' uno sopra l'altro: e siccome il novantasei-agono perde di altezza un secondo quadrato, ed $^1/_8$; e più precisamente $^1/_{64}$ ed $^1/_8$: così si farà un risecamento di $^1/_2$ di $^1/_{64}$, e di $^1/_2$ d' ottava; ed in conseguenza vien constituito l' equilatero cento novantadue-agono; in cui colla dimostrazione chiaramente si conosce, che resta formato il cerchio, ch' è un perfetto poligono: mentre nella lunghezza di un grado v' è la perfetta linea retta, che colla sua obbliquità forma coll' altra retta parimente obbliqua, l' angolo ottuso: e con ogni chiarezza si è anche dimostrato, che se d' intorno all' esagono; non che d' intorno al dodicagono v' è circoscritto un cerchio, n' è risultato che le porzioni di arco, che sono sopra i lati del dodicagono si sono avvicinate del doppio relativamente a quelle, che sono sopra i lati

$^1/_8$, ed $^1/_{64}$ relativamente a quella del quadrato: ed essendo che il triangolo isoscele del ventiquattr' agono ha i suoi lati di doppia altezza della base, e che constituiscono l' angolo opposto alla base, così n' avviene, che avendo i lati del doppio della base; e conseguentemente del doppio de' lati del triangolo equilatero, perderà di altezza il triangolo isoscele di $^1/_2$ d' ottava, e di $^1/_2$ di $^1/_{64}$; perchè i lati si ribassano di una metà meno di quello, che si ribassano i lati del triangolo equilatero nella formazione dell' angolo opposto alla base.

Art. XI. I lati del triangolo isoscele del quarantott' agono sono del doppio de' lati del triangolo isoscele del ventiquattr' agono; e per l' istessa ragione perde di altezza il triangolo, di un quarto di ottava, e di un quarto di $^1/_{64}$.

Art. XII. I lati del triangolo isoscele del novantasei-agono sono del doppio di altezza in rapporto ai lati del triangolo isoscele del quarantott' agono: ed a proporzione il triangolo isoscele del novantasei-agono perde di altezza $^1/_{64}$, ed un ottava.

Art. XIII. I lati del triangolo isoscele del cento novantadue agono sono del doppio di altezza de' lati del triangolo isoscele del novantasei-agono: così a proporzione il triangolo isoscele del cento novantadue agono perde di altezza di $^1/_2$ di $^1/_{64}$, e di $^1/_2$ d' ottava.

Art. XIV. E se nel triangolo equilatero

la perdita di altezza, secondo l'articolo primo, è di $^1/_8$, e di $^1/_{64}$: la medesimazione delle linee nell'angolo opposto alla base a proporzione sarà di $^1/_{64}$, e di $^1/_8$: ed a proporzione nel triangolo isoscele del ventiquattr'agono i lati, che constituiscono l'angolo opposto alla base, per essere del doppio maggiori de' lati del triangolo equilatero, si medesimeranno di $^2/_{64}$, e di $^2/_8$: perchè se quelli si sono medesimati di $^1/_{64}$, e di $^1/_8$, questi debbono assolutamente medesimarsi di $^2/_{64}$, e di $^2/_8$ ad oggetto che a misura l'angolo si innalza, a quell'istessa proporzione si ristringono i lati, e si medesimano.

Art. XV. I lati del triangolo isoscele del quarantott'agono si medesimeranno a proporzione di $^4/_{64}$, e di $^4/_8$: quelli del novantasei-agono di $^1/_8$ del primo quadrato, e di $^1/_{64}$: quelli del cento novantadue-agono la medesimazione sarà di $^2/_8$ parimente del primo quadrato, e di $^2/_{64}$.

Art. XVI. In rapporto alla base del triangolo equilatero i lati di ciascun angolo si sono medesimati parimente di $^1/_{64}$, e di $^1/_8$, giusto perchè tutti i lati sono eguali.

Art. XVII. I lati di ciascun angolo del ventiquattr'agono si medesimano nella base di $^1/_2$ di $^1/_{64}$, e di una metà d'ottava: perchè avendo i lati del doppio di altezza di quelli del triangolo equilatero, del doppio parimente debbono allargarsi: ed è cosa naturale, che a misura, che l'angolo opposto

alla base s' innalza a quell' istessa proporzione gli angoli alla base si allargano, ed i lati si rendono meno obbliqui.

Art. VIII. I lati di ciascun angolo nella base del quarantott' agono a proporzione si medesimeranno un quarto di $^1/_{64}$, e di un quarto d' ottava, per le istesse ragioni dette avanti.

Art. XIX. I lati di ciascun angolo nella base del novantasei-agono a proporzione vengono medesimati di $^1/_8$ di $^1/_{64}$, e di $^1/_{64}$ di $^1/_8$, la sessantaquattresima equivale ad un terzo quadrato.

Art. XX. I triangoli isosceli del cento novantadue-agono non si medesimano nella base: perchè la medesimazione è stata tolta dal risecamento, e non vi sono circoscritti altri gradi sferici: nè secondo la dimostrazione si possono circoscrivere: ed in questo grado sferico resta perfezionata, secondo si è detto nell' articolo sesto, la rotondità del cerchio; e se si circoscrivono altri gradi sferici, non s' ottiene altro, che l' ingrandimento del grado; per cui la periferia non può assolutamente essere, che 192 gradi.

Art. XXI. Per ottenere l' identica misura dell' aia del cerchio, ch' è l' oggetto, ed il fine principale di tutto questo lavoro v' è di bisogno dell' identica metà della periferia, e dell' identico raggio. Ed essendo che d' intorno al cento novantadue-agono non si possono, per l' antecedente articolo, e per l' arti-

colo sesto circoscrivere altri gradi sferici : così la metà della periferia, per l' articolo settimo è di 96 gradi, ossia della lunghezza di 96 quadrati : or per ottenere la misura dell' aia del cerchio non solo v' è di bisogno la metà della periferia : ma bensì dell' identico raggio, che lo conosceremo nel presente teorema.

DIMOSTRAZIONE I.

TEOREMA I.

Se dal centro del cerchio alla periferia si è tirato un raggio; ne risulta che la sua altezza è di 31 quadrati $^{5}/_{8}$, *e* $^{6}/_{64}$ *del primo quadrato, e* $^{4}/_{8}$, *e* $^{4}/_{64}$ *del secondo quadrato.*

Poichè essendo che d' intorno al cento novantadue-agono non si possono, per l'antecedente articolo, e per l' art. settimo circoscrivere altri gradi sferici : mentre non ne risultarebbe altro che l' ingrandimento del grado, e sempre sarebbero cento novantadue: ed essendo che dal centro alla periferia, per l'articolo ottavo vi sono 32 gradi sferici, che ciascuno avrebbe per la dimostrazione dell' opera principale, l' altezza di un intero quadrato : ma siccome per la perdita di altezza, che dà l' esagono, ch' è composto di sei triangoli equilateri, e ciascuno, per l' articolo pri-

mo perde di altezza $^{1}/_{8}$, ed $^{1}/_{64}$ relativamente a qnella del quadrato : e siccome vi sono avvenuti quattro risecamenti, che coll' esagono, secondo l' articolo IX. danno di perdita di altezza $^{2}/_{8}$, ed $^{1}/_{64}$ del primo quadrato ; non che $^{3}/_{8}$, e $^{4}/_{64}$ del secondo quadrato : così tolte queste mancanze di altezza dai 32 quadrati, resta quella dell' identico raggio, 31 quadrati $^{5}/_{8}$, e $^{6}/_{64}$ del primo quadrato, e $^{4}/_{8}$, e $^{4}/_{64}$ del secondo quadrato.

Se dunque dal centro del cerchio alla periferia ec.

DIMOSTRAZIONE II.

PROBLEMA I.

Dato sia un cerchio: ne risulta che la sua aia è di 3045 quadrati $^{6}/_{8}$, e $^{6}/_{4}$.

Poichè la metà della periferia, secondo l'articolo VII. è di 96 gradi, ossia di 96 lati, che ciascun grado ha la lunghezza di un lato de' quadrati, che sono nel dodicagono, o pure di qualunque lato di un quadrato, ch' è nell'aia del cerchio, che non ha sofferto risecamento : ed il raggio, secondo l'antecedente teorema e di 31 quadrati $^{5}/_{8}$, e $^{6}/_{64}$ del primo quadrato, e $^{4}/_{8}$, e $^{4}/_{64}$ del secondo quadrato.

In primo luogo $^{4}/_{64}$ sono quattro terzi quadrati, e come dovrebbero moltiplicarsi per la metà della periferia : così per brevità si riducono in vece, prima ad ottave del secondo

del secondo quadrato, indi a sessantaquattresime del primo quadrato.

E come $^{4}/_{64}$, ossia quattro terzi quadrati formano una metà d'ottava del secondo quadrato: così 96 metà d'ottava formano 48 ottave di un secondo quadrato, e per ridurle a sessantaquattresime del primo quadrato si dividono per 8: così 48 diviso per 8 dà di prodotto $^{6}/_{64}$ del primo quadrato. Si piazzano nella tavola T.

In secondo luogo $^{4}/_{8}$ di un secondo quadrato si riducono a sessantaquattresime del primo quadrato: e come la metà della periferia è di 96 gradi; così 96 metà d'ottave di un secondo quadrato formano $^{48}/_{64}$ del primo quadrato, e diviso questo prodotto per 8 dà $^{6}/_{8}$ del primo quadrato. Si piazzano nella tavola T.

T

Quadrati:	ottave:	sessanta:
0 :	0 :	6
0 :	6	
9		
60		
2976		
3045 :	6 :	6

In terzo luogo $^{6}/_{64}$ del primo quadrato si moltiplicano per la metà della periferia, e danno di prodotto $^{576}/_{64}$ anche del primo quadrato; e come $^{64}/_{64}$ formano un primo quadrato: così $^{576}/_{64}$ si dividono per 64, di quanto è composto il quadrato, e danno di pro-

dotto 9 quadrati. Si piazzano nella lettera T.

In quarto luogo si moltiplicano $^5/_8$ del primo quadrato per 96, che danno di prodotto $^{480}/_8$: ma come ogni otto ottave formano un quadrato: così si divida il prodotto di 480 per 8, e dà 60 quadrati. Si piazzano nella lettera T.

In ultimo si moltiplicano 31 quadrati per 96, e danno di prodotto di 2976 quadrati. Si piazzano nelle tavola T.

Sommate le colonne che sono nella tavola T, danno il totale di 3045 quadrati $^6/_8$, e $^6/_{64}$: ed in conseguenza tutta l' aia del cerchio è di 3045 quadrati $^6/_8$, e $^6/_{64}$.

Dunque dato sia un cerchio ec.

DIMOSTRAZIONE III.

PROBLEMA II.

La perdita di altezza che soffre il raggio del cerchio per causa dell' esagono, e da quattro risecamenti dà di perdita nell' aia 26 quadrati $^1/_8$, e $^2/_{64}$.

Poichè la perdita di altezza che soffre il raggio, secondo l' articolo IX. è di $^2/_8$, ed $^1/_{64}$ del primo quadrato, e $^3/_8$, e $^4/_{64}$ del secondo quadrato: tutte queste frazioni moltiplicate per la metà della periferia danno di perdita nell' aia del cerchio 26 quadrati $^1/_8$, e $^2/_{64}$. Se ne faccia l' analisi.

In primo luogo $^4/_{64}$ essendo quattro terzi

quadrati, secondo il problema antecedente danno di perdita nell'aia del cerchio $^{6}/_{64}$ del primo quadrato. Si piazzano nella tavola B.

B		
Quadrati :	ottave :	sessant.:
o :	o :	6
o :	4 :	4
1 :	4 :	o
24 :	o :	o
26 :	1 :	2

In secondo luogo si moltiplicano $^{3}/_{8}$ di un secondo quadrato per la metà della periferia, che danno di prodotto $^{288}/_{8}$ di un secondo quadrato, che per ridurle ad ottave del primo quadrato, si debbano ridurre prima a sessantaquattresime del primo quadrato, e poi ad ottave: onde per ridurle a sessantaquattresime si deve il prodotto 288 dividere per 8, che darà $^{36}/_{64}$, e queste ridotte ad ottave del primo quadrato formano $^{4}/_{8}$, e $^{4}/_{64}$: perchè 8 in 36 entra quattro volte, e restano $^{4}/_{64}$. Si piazzano nella tavola B.

In terzo luogo $^{1}/_{64}$ del primo quadrato, avendo riguardo alla metà della periferia, avremo $^{66}/_{64}$ si riducano a quadrati: e come il quadrato è composto di $^{64}/_{64}$: così si divida 96 per 64, che darà un quadrato, e $^{4}/_{8}$. Si piazzano nella tavola B.

In fine si riducano 96 di $^{2}/_{8}$ del primo quadrato a quadrati: poichè $^{2}/_{8}$ del primo quadrato equivalgono ad un quarto di un

quadrato: e così 96 quarti formano 48 metà di un quadrato, e 48 metà formano 24 quadrati. Si piazzano nella tavola B.

Sommate le frazioni, e quadrati che sono nella tavola B, ammontano a 26 quadrati $^{1}/_{8}$ e $^{2}/_{64}$: in conseguenza la perdita di altezza, che soffre il raggio dà di perdita nell'aia 26 quadrati $^{1}/_{8}$, e $^{2}/_{64}$.

Dunque la perdita di altezza ec.

DIMOSTRAZIONE IV.

PROBLEMA III.

Che l'aia del cerchio sia di 3045 quadrati $^{6}/_{8}$, e $^{6}/_{64}$ si dimostra coll'analisi.

Poichè dall'articolo ottavo si rileva, che nell'aia del cerchio dal centro alla periferia vi sono 32 gradi sferici; e questi consideratisi per ipotesi come interi quadrati, senza che vi fosse perdita di altezza; e moltiplicati per la metà della periferia, darebbero 3072 quadrati; e che poi tolte, secondo l'antecedente problema le perdite avvenute nell'aia, restano 3045 quadrati $^{6}/_{8}$, e $^{6}/_{64}$. Si faccia l'analisi.

Poichè dal centro del cerchio escono sei triangoli equilateri, che constituiscono l'esagono, e formano il primo grado sferico: ed i sei triangoli equilateri formano tre rombi, che considerandosi per ipotesi senza perdita

di altezza formano tre quadrati. Si piazzano nella tavola T.

D' intorno all' esagono v' è circoscritto il dodicagono, che ha parimente un solo grado sferico; e vien composto da sei quadrati, e da sei triangoli equilateri, che ridotti a rombi, e considerati senza perdita di altezza formano altri tre quadrati: cioè $6 + 3 = a\ 9$. Si piazzano nella tavola T.

D' intorno al dodicagono v' è circoscritto l' equilatero ventiquattr' agono, che avendo 24 angoli, ha per necessità 24 lati, che 12 vengono occupati da 12 colonne di quadrati, e 12 dalle basi de' triangoli isosceli: perchè in mezzo a due colonne di quadrati giace un triangolo isoscele, ed in mezzo a due triangoli isosceli giace una colonna di quadrati: e perciò una metà de' lati vien occupata dalle colonne de' quadrati, e l' altra metà dalle basi de' triangoli isosceli: e siccome due triangoli isosceli tra loro uniti formano un parallelogrammo: così 12 triangoli isosceli formano sei colonne. Di vantaggio, secondo l' articolo ottavo, il ventiquattr' agono ha due gradi sferici, che tra loro uniti formano l' altezza di due quadrati, mancanti a cagione di risecamento, che, secondo l' articolo ottavo, è di una metà d' ottava, e di $^1/_2$ di $1/_{64}$: così ciascuna colonna di quadrati; non che ciascuna colonna formata da triangoli isosceli sarebbe dell' altezza di due quadrati meno di $^1/_2$ d' ottava, e di $^1/_2$ di $^1/_{64}$:

ma qui considerandosi ciascuna colonna senza perdita di altezza, sarà di due interi quadrati, come sarebbe la colonna A de' quadrati, e la colonna B de' triangoli isosceli. Or moltiplicatosi 12 colonne per la colonna A avremo di prodotto 24 quadrati; e moltiplicatosi sei colonne per la colonna B avremo di prodotto 12 quadrati: entrambi i prodotti si piazzano nella tavola T.

D'intorno al ventiquattr' agono v'è circoscritto l'equilatero quarantott' agono, che avendo 48 lati, e quattro gradi sferici, e dimostrandosi all' istesso modo dell' antecedente ventiquattr' agono: ne risulta che ha 24 colonne di quadrati, ciascuna dell' altezza di quattro quadrati, come si ravvisa nella colonna C; e 12 colonne formate da 24 triangoli isosceli, ciascuna parimente dell' altezza di 4 quadrati, come si ravvisa nella colonna D: or moltiplicatosi 24 colonne per la colonna C, avremo 96 quadrati; e moltiplicatosi 12 colonne per la colonna D, avremo 48 quadrati: entrambi i prodotti si piazzano nella tavola T.

D'intorno al quarantott' agono v'è circoscritto l'equilatero novantasei-agono, che avendo 96 lati, ed otto gradi sferici, e dimostrandosi all' istesso modo, che abbiamo dimostrato il ventiquattr' agono: ne risulta che ha 48 colonne di quadrati, ciascuna dell' altezza di 8 quadrati, come s'osserva nella colonna O; e 24 colonne formate da 48 triangoli isosceli, ciascuna dell' altezza di 8 qua-

drati, come s' osserva nella colonna P: or moltiplicatosi 48 colonne per la colonna O, avremo di prodotto 384 quadrati; e moltiplicatosi 24 colonne per la colonna P, avremo di prodotto 192 quadrati: entrambi i prodotti si piazzano nella tavola T.

D' intorno al novantasei-agono v' è circoscritto l' equilatero cento novantadue agono, che avendo 192 lati, e 16 gradi sferici, e dimostrandosi nella maniera, che si è dimostrato il ventiquattr' agono; n' avviene che avrà 96 colonne di quadrati, ciascuna dell'altezza di 16 quadrati, come si ravvisa nella colonna R; e 48 colonne formate da 96 triangoli isosceli, ciascuna parimente dell' altezza di 16 quadrati, come si ravvisa nella colonna S: or moltiplicatosi 96 colonne per la colonna R, avremo di prodotto 1536 quadrati; e moltiplicatosi 48 colonne per la colonna S, avremo di prodotto 768 quadrati: entrambi i prodotti si piazzano nella tavola T.

Sommatosi i prodotti, che sono nella tavola T, avremo il totale di 3072 quadrati; da questo totale toltone 26 quadrati di mancanze $^1/_8$, e $^2/_{64}$, secondo il problema antecedente, restano 3045 quadrati $^6/_8$, e $^6/_{64}$, quanto nel primo problema si è dimostrato, e coll' analisi è venuto con questo problema confirmato: perchè tutta l'aja vien occupata dall' istesso quantitativo, ed identico, che compone 3045 quadrati $^6/_8$, e $^6/_{64}$.

Che sia dunque l' aia del cerchio ec.

T		
o : o :		o3
o : o :		o9
o : o :		12
o : o :		24
o : o :		48
o : o :		96
o :	1	92
o :	3	84
o :	7	68
1	5	36
3	o	72

C

A B

DIMOSTRAZIONE V.
TEOREMA II

Abbenchè l' aia del cerchio non è stata per intero divisa in quadrati, nè per sua natura può assolutamente per intero all' istesso modo dividérsi : pure è eguale a 3045 quadrati 6/8 , e 6/61.

Prima della dimostrazione si faccia la seguente osservazione.

Essendo che nei gradi sferici maggiori, cioè nel ventiquattr' agono , nel quarantott' agono nel novantasei-agono, nel cento novantadue-agono vi sono avvenuti de' risecamenti ad oggetto di eguagliare le basi de' triangoli isosceli ai lati de' quadrati, che non hanno sofferto risecamento: così è chiaro, che il resto de' quadrati, ove sono stati tali risecamenti, non è di quantità di quadrati : ed essendo che l'esagono è formato di sei triangoli equilateri , ed il dodicagono di sei quadrati , e sei triangoli equilateri : ed essendo che in mezzo alle colonne de' quadrati del ventiquattr' agono , del quarantott' agono ec vi giaciono i triangoli isosceli : così n' avviene che l' aia del cerchio è un miscuglio di quadrati, di quantità di quadrati ; di triangoli isosceli , e di triangoli equilateri ; e tutto questo miscuglio occupa , come si è dimostrato nell' antecedente problema , l' intera aia del cerchio , e compone i 3045 quadrati 6/8 , e 6/61 : e più precisamente si dimostra , che tutto questo composto è eguale a 3045 quadrati 6/8 , e 6/61.

Poichè l' identico raggio di 31 quadrati $^{5}/_{8}$, e $^{6}/_{64}$ del primo quadrato, e $^{4}/_{8}$, e $^{4}/_{64}$ del secondo quadrato è risultato, secondo il teorema primo dall' identica altezza di 32 gradi sferici: perchè, secondo l' antecedente problema essendosi per ipotesi supposto avere i gradi sferici l' altezza di 32 interi quadrati; ed indi dal prodotto di 3072 quadrati, risultato dalla moltiplica dell' istessi gradi sferici per la metà della periferia, è stato tolto il prodotto di mancanze, che, secondo il problema secondo è di 26 quadrati $^{1}/_{8}$, e $^{2}/_{64}$, quanto, secondo il primo problema è il prodotto risultato dall' identico raggio moltiplicato anche per la. metà della periferia: così ne risulta che il miscuglio di quadrati, di quantità di quadrati, di triangoli isosceli, e di triangoli equilateri è perfettamente eguale a 3045 quadrati $^{6}/_{8}$, e $^{6}/_{64}$

Abbenchè dunque l' aia del cerchio non è stata per intero divisa, nè per sua natura può assolutamente per intero all' istesso modo dividersi ec.

DIMOSTRAZIONE VI.

TEOREMA III.

L' aia del cerchio è eguale all' aia di un rettangolo, che ha l' altezza del raggio, e la lunghezza della metà della periferia.

Poichè avendo il rettangolo l' altezza del raggio, e la lunghezza della metà della periferia: così moltiplicato nel rettangolo l' al-

tezza per la lunghezza, avremo la sua aia di 3045 quadrati $^6/_{78}$, e $^6/_{764}$: ma l' aia del cerchio, per il problema primo, ha l' istessa quantità di quadrati, e frazioni: dunque l'aia del cerchio è eguale all' aia del rettangolo, che ha l' altezza del raggio, e la lunghezza della metà della periferia.

L' aia del cerchio ec.

DIMOSTRAZIONE VII.

TEOREMA IV.

In vigore del problema terzo si dimostra in altro modo, che la somma de' prodotti differenziali è perfettamente eguale al prodotto integrale; ed è questo teorema una prova de' calcoli del problema primo, e secondo, e conseguentemente l'aia del cerchio è di 3045 quadrati $^6/_{78}$, e $^6/_{764}$; e le mancanze sono 26 quadrati $^1/_{78}$, e $^2/_{764}$.

Poichè per calcolo integrale in questo rincontro s' intende di unire nuovamente al ventiquattr' agono, al quarantott' agono ec. le quantità risecate; ed i rombi formati dai triangoli equilateri, che sono nell' esagono, e nel dodicagono si considerano interi quadrati: mentre tutte queste quantità sono parti, che considerandosi aggreate ai quadrati esistenti, che compongono l' aia del cerchio, formano l' intero: e siccome dal centro alla periferia, per l' articolo ottavo, vi sono 32 gradi sferici: così considerati interi quadra-

ti, e moltiplicati per la metà dell'istessa periferia danno il totale ed integrale prodotto di 3072 quadrati, di quanto col minuto analisi si è dimostrato nel problema terzo.

In rapporto ai prodotti differenziali, abbiamo che l'aia del cerchio, secondo il problema primo, è di 3045 quadrati $^{6}/_{8}$, e $^{6}/_{64}$; e quelli di mancanze, avvenute a cagione dei risecamenti, sono, secondo il problema secondo 26 quadrati $^{1}/_{8}$, e $^{2}/_{64}$, che unite queste due differenze ammontano a 3072 quadrati: e così ne risulta che il calcolo differenziale è perfettamente eguale al calcolo integrale; ossia la somma de' prodotti differenziali è perfettamente eguale al prodotto integrale: dunque questo teorema è una prova del problema primo, e del secondo: perchè ci assicura, che i calcoli sì dell' uno, che dell' altro problema non sono erronei; ed in conseguenza è fuor di dubbio che l'aia del cerchio è di 3045 quadrati $^{6}/_{8}$, e $^{6}/_{64}$ e le mancanze avvenute a cagione de' risecamenti sono effettivamente 26 quadrati $^{1}/_{8}$, e $^{2}/_{64}$.

In vigore dunque del problema terzo si dimostra in altro modo, che la somma dei prodotti differenziali è perfettamente eguale al prodotto integrale ec.

COROLLARIO.

Essendosi dunque nel secondo problema dimostrato, e con questo teorema confermato, che la perdita avvenuta nell' aia del cerchio

., . a cagione de' risecamenti, e dell'esagono è di 26 quadrati $^1/_8$, e $^2/_{64}$: or nel seguente riassunto con somma ammirazione, e stordimento conosceremo , che questi quadrati , e frazioni non sono esistenti : ma sono mancanza di quadrati prodotte per effetto de' risecamenti, e dalle inclinazioni delle linee nella formazione degli angoli acuti ne' triangoli ; non che dalle tante , e minute medesimazioni ; e che le quarantotto medesimazioni , che sono nelle basi de' triangoli isosceli del quarantott' agono, essendo ciascuna di un quarto di $^1/_{64}$, e di un quarto di un'ottava ; la prima equivale ad $^1/_{256}$, la seconda equivale ad $^1/_{1024}$: e le 96 medesimazioni , che sono nelle basi de' triangoli isosceli del novantasei-agono, ciascuna essendo di un' ottava di un secondo quadrato , e di $^1/_{64}$, che la sessantaquattresima equivale ad un terzo quadrato ; e più precisamente la prima equivale ad $^1/_{512}$, ed il terzo quadrato equivale ad $^1/_{4096}$: e così di tante altre minute frazioni , che tutte insieme unite ad un libro parimente di frazioni, con indicibile stordimento , ed ammirazione compongono identicamente le mancanze di 26 quadrati $^1/_8$, ed $^2/_{64}$. Se ne faccia l'analisi.

LIBRO SECONDO

Riassunto, in cui vi è la raccolta di tutte le mancanze. prodotte non solo dalla perdita di altezza avvenuta a cagione dei risecamenti, e dalle inclinazioni delle linee nella formazione degli angoli acuti ne' triangoli: ma bensì dalle tante, e minute medesimazioni; e che tutte insieme unite compongono identicamente i 26 quadrati di mancanze $^1/_8$, e $^2/_{64}$.

CAPITOLO I.

Nell' esagono e precisamente ne' triangoli equilateri le mancanze di altezza, prodotte dalle inclinazioni delle linee nella formazione degli angoli acuti, opposti alle basi ammontano a $^3/_8$, e $^3/_{64}$ del primo quadrato.

Art. I. Poichè essendo, che secondo l'articolo I. del primo riassunto che il triangolo equilatero perde di altezza $^1/_8$, e $^1/_{64}$, relativamente a quella del quadrato: ed essendo che due triangoli equilateri formano un rombo: ed essendo che nell' esagono vi sono tre rombi: così la perdita di altezza è di $^3/_8$, e $^3/_{64}$.

Art II. Nel dodicagono vi sono altri sei triangoli, che formano altri tre rombi: così la perdita di altezza è parimente di $^3/_8$, e $^3/_{64}$.

Art. III. Nel ventiquattr'agono, per l'articolo X. del 1. riassunto, i triangoli isosceli perdono di altezza $^1/_2$ d' ottava, ed $^1/_2$ di $^1/_{64}$: ed

essendo che vi sono 12 triangoli isosceli: ed essendo che due triangoli formano un paralellogrammo: così avremo 6 paralellogrammi, ed in conseguenza vi sarà di perdita di altezza altre 6 metà d' ottava, e sei metà di $^1/_{64}$, che si riducono a $^3/_8$, e $^3/_{64}$.

Art. IV. Nel quarantott' agono, per l' articolo undicesimo i triangoli isosceli perdono di altezza un quarto d' ottava, ed un quarto di $^1/_{64}$: ed essendo che vi sono 24 triangoli isosceli, che formano 12 paralellogrammi: così 12 quarti di $^1/_8$, e 12 quarti di $^1/_{64}$ formano $6/2$ d' ottava, e sei metà di $^1/_{64}$, che si riducano a $^3/_8$, e $^3/_{64}$.

Art. V. Nel novantasei-agono, per l' articolo dodicesimo i triangoli isosceli perdono di altezza un mezzo quarto d' ottava, ed un mezzo quarto di $^1/_{64}$; ossia di $^1/_{64}$, e di $^1/_8$, ed essendo che vi sono 48 triangoli isosceli; che formano 24 paralellogrammi: così $^{24}/_{64}$, e $^{24}/_8$ formano $^3/_8$, e $^3/_{64}$.

Art. VI. Nel cento novantadue-agono, per l' articolo tredicesimo i triangoli isosceli perdono di altezza $^1/_2$ di $^1/_{64}$, e di una metà di ottava: ed essendo che vi sono 96 triangoli isosceli che formano 48 paralellogrammi: così 48 metà di $^1/_{64}$, e 48 metà d'ottave formano $^{24}/_{64}$, e $^{24}/_8$, che ridotte ad ottave formano $^3/_8$, e $^3/_{64}$.

Sommate qui appresso tutte queste frazioni dall' esagono fino al cento novantadue-agono, ammontano a due quadrati $^4/_8$, e $^4/_{64}$.

Somme degli articoli del Cap. I.

	Quadrati :	ottave	:	sessantaq.
Art. I.		3	:	3
Art. II.		3	:	3
Art. III.		3	:	3
Art. IV.		3	:	3
Art. V.		3	:	3
Art. VI.		3	:	3
	2 =	= 4	:	2

CAPITOLO II.

Ne' paralellogrammi rettangoli del ventiquattr' agono, calcolandosi le mancanze di altezza avvenute per i risecamenti, ammontano a $^6/_8$ di un quadrato, e $^6/_{64}$.

Art. I. Perochè, essendo per l'articolo terzo, che nel ventiquattr' agono v' è stato un risecamento di una metà di ottava, e di una metà di $^1/_{64}$: ed essendo che vi sono 12 paralellogrammi, che ciascuno ha l'altezza di due gradi sferici: così 12 metà d'ottava, e 12 metà di $^1/_{64}$ formano $^6/_8$, del primo quadrato, e $^6/_{64}$.

Art. II. Nel quarantott'agono, per l'art. I. del 1. riassunto v' è stato un risecamento di un quarto d'ottava, e di un quarto di $^1/_{64}$: ed essendo che vi sono 24 paralellogrammi, che ciascuno ha l'altezza di quattro gradi sferici: così 24 quarti d'ottave, e ventiquattro quarti di $^1/_{64}$ formano 12 metà d'ottave, e 12 metà di $^1/_{64}$, che si riducano a $^6/_8$, e $^6/_{64}$.

Art. III. Nel novantasei-agono, per l'ar-

ticolo quinto v' è stato un risecamento di un mezzo quarto d' ottava, e di un mezzo quarto di $^1/_{64}$: ed essendo che vi sono 48 parallelogrammi, che ciascuno ha l' altezza di 8 gradi sferici : cosi $^{48}/_{64}$, e $^{48}/_8$ si riducono a $^6/_8$, e $^6/_{64}$.

Art. IV. Nel cento novantadue agono, per l' articolo sei v' è stato un risecamento di $^1/_2$ di $^1/_{64}$, e di una metà d' ottava : ed essendo che vi sono 96 parallelogrammi, che ciascuno ha l' altezza di 16 gradi sferici : così 96 metà di $^1/_{64}$, e 96 metà d' ottava si riducano a $^{48}/_{64}$, e $^{48}/_8$, che formano $^6/_8$, e $^6/_{64}$.

Sommate qui appresso tutte le frazioni dal ventiquattr' agono fino al cento novantadue-agono ammontano a tre quadrati, e $^3/_8$.

	Quadrati	ottave	sessantaq.
Art I.		6 =	: = 6
Art II.		6 =	: = 6
Art. III.		6 =	: = 6
Art. IV.		6 =	: = 6
	3 =	3 =	: = o

CAPITOLO III.

Ne' triangoli isosceli del ventiquattr' agono calcolandosi le mancanze d' altezza, avvenute per i risecamenti ammontano a $^3/_8$ di un quadrato, e $^3/_{64}$.

Art. I. Poichè essendo, per l' articolo terzo, che nel ventiquattr' agono v' è stato un

risecamento di una metà d'ottava, e di una metà di $^{1}/_{64}$: ed essendo che vi sono 12 triangoli isosceli: ed essendo che due triangoli formano un paralellogrammo: così sei metà d'ottava. e sei metà di $^{1}/_{64}$ formano $^{3}/_{8}$ del primo quadrato, e $^{3}/_{64}$.

ART. II. Nel quarantott'agono, per l'articolo IV. del 1. riassunto v'è stato un risecamento di un quarto d'ottava, e di undi $^{1}/_{64}$: ed essendo che vi sono 24 triangoli isosceli, che formano 12 paralellogrammi: così 12 quarti di $^{1}/_{8}$, e 12 quarti di $^{1}/_{64}$ formano sei metà d'ottava, e sei metà di $^{1}/_{64}$, che si riducono a $^{3}/_{8}$, e $^{3}/_{64}$.

ART. III. Nel novantasei agono, per l'articolo quinto v'è stato un risecamento di mezzo quarto d'ottava, e di un mezzo quarto di $^{1}/_{64}$: ossia di $^{1}/_{64}$, e di $^{1}/_{8}$: ed essendo che vi sono 48 triangoli isosceli, che formano 24 paralellogrammi: così $^{24}/_{64}$ del primo quadrato, e 24 ottave formano $^{3}/_{8}$, e $^{3}/_{64}$.

ART. IV. Nel cento novantadue agono, per l'articolo sesto v'è stato un risecamento di una metà di $^{1}/_{64}$, e di una metà d'ottava; ed essendo che vi sono 96 triangoli, che formano 48 paralellogrammi: così 48 metà di $^{1}/_{64}$ e 48 metà d'ottava, si riducano a $^{3}/_{8}$, e $^{3}/_{64}$.

Sommate qui appresso tutte queste frazioni dal ventiquattr'agono fino al cento novantadue-agono, ammontano ad un quadrato $^{5}/_{8}$, e $^{4}/_{64}$.

	Quadrati : ottave : sessantaq.
Art. I.	3 = : = : 3
Art. II.	3 = : = : 3
Art. III.	3 = : = : 3
Art. IV.	3 = : = : 3
	1 : 5 = : = : 4

CAPITOLO IV.

Medesimazioni avvenute negli angoli acuti de' triangol equilateri e precisamente di quelli angoli, che s' oppongono alle basi.

Art. I. Se nel triangolo equilatero la perdita di altezza è di $^1/_8$, e di $^1/_{64}$, la medesimazione sarà a proporzione $^1/_{64}$, e $^1/_8$: ed essendo che l' esagono è composto di sei triangoli equilateri, e che i triangoli formano tre rombi: ed essendo che ciascun rombo perde di altezza per effetto della medesimazione $^1/_{64}$, ed $^1/_8$: così nell' esagono avremo di perdita $^3/_{64}$, e $^3/_8$.

Art. II. Nel dodicagono essendovi parimente sei triangoli equilateri: ed essendo che due triangoli compongono un rombo; così avremo di perdita anche $^3/_{64}$, e $^3/_8$.

Art. III. Nel triangolo isoscele del ventiquattr' agono, per l' articolo XIV. a proporzione del triangolo equiletero, i lati che formano l' angolo opposto alla base si medesimano di $^2/_{64}$, e di $^2/_8$; ed essendo che vi sono 12 triangoli isosceli, che due triangoli formano un parallelogrammo: così sei para-

lellogrammi perdono di altezza $^{12}/_{64}$, e $^{2}/_{8}$, che ridotte alla propria denominazione formano $^{1}/_{8}$ del primo quadrato $^{5}/_{64}$, e $^{4}/_{8}$.

Art. IV. Nel triangolo isoscele del quarantott' agono, per l'articolo XV. i lati che formano gli angoli opposti alla base si medesimano di $^{4}/_{64}$, e $^{4}/_{8}$: ed essendo che vi sono 24 triangoli isosceli, che formano 12 paralellogrammi: ed essendo che $^{4}/_{64}$ del primo quadrato, e $^{4}/_{8}$, equivalgono ad una metà d' ottava, ed una metà di $^{1}/_{64}$; così 12 metà formano $^{6}/_{8}$ di un quadrato, e $^{6}/_{64}$.

Art. V. Nel triangolo isoscele del novantasei-agono, per l'articolo V. i lati che formano l'angolo opposto alla base si medesimano di $^{1}/_{8}$ del primo quadrato, e di $^{1}/_{64}$: ed essendo che vi sono 48 triangoli isosceli, che formano 24 paralellogrammi: così $^{24}/_{8}$ del primo quadrato, e $^{24}/_{64}$ formano tre quadrati, e $^{3}/_{8}$.

Art. VI. Nel triangolo isoscele del cento novantadue-agono, per l'istesso articolo XV. i lati che formano l'angolo opposto alla base si medesimano di $^{2}/_{8}$ del primo quadrato, e di $^{2}/_{64}$: ed essendo che vi sono 96 triangoli isosceli, che formano 48 paralellogrammi: così 48 di $^{2}/_{8}$ e di $^{2}/_{64}$ formano 13 quadrati, e $^{4}/_{8}$.

Unite qui appresso tutte le quantità di medesimazione, che sono dall' esagono fino al cento novantadue-agono, ammontano a 18 quadrati $=$ $^{2}/_{64}$, e $^{2}/_{8}$.

	Quadrati	ottave	sessant.	ottave
Art. I.	0	0	3	3
Art. II.	0	0	3	3
Art. III.	0	1	5	4
Art. IV.	0	6	6	0
Art. V.	3	3	0	0
Art. VI.	13	4	0	0
	18	0	2	2

CAPITOLO V.

Medesimazioni avvenute ne' triangoli equilateri, ed isosceli, e precisamente di quei lati che si medesimano nella base.

Art I. Nell'esagono i lati de' triangoli equilateri, che si medesimano nella formazione dell'angolo alla base, per l'articolo XVI. la medesimazione è di $^{1}/_{64}$, e di $^{1}/_{8}$: ed essendo che vi sono tre rombi: così la perdita è di $^{3}/_{64}$, e $^{3}/_{8}$: di altro tanto si medesimano nell' altro angolo, ed ammontano a $^{6}/_{64}$: e $^{6}/_{8}$.

Art. II. Nel dodicagono essendovi anche sei triangoli equilateri, che formano tre rombi: così avremo l' istessa perdita di $^{6}/_{64}$, e $^{6}/_{8}$.

Art. III Nel ventiquattr' agono, per l'articolo XVII., la medesimazione è di una metà di $^{1}/_{64}$, e di una metà d' ottava; ed essendo che vi sono 12 triangoli isosceli, che formano sei parallellogrammi: così sei metà di $^{1}/_{64}$, e sei metà di ottava sono eguali a $^{3}/_{64}$, e $^{3}/_{8}$: di altro tanto si medesimano nell'angolo, ed ammontano a $^{6}/_{64}$ e $^{6}/_{8}$.

Art. IX. Nel quarantott' agono per l'artico-

lo XVIII. la medesimazione è di un quarto di $^1/_{64}$ e di un quarto di $^1/_8$: ed essendo che vi sono 24 triangoli isosceli, che formano 12 parallelogrammi : così 12 quarti d' $^1/_{64}$ e 12 quarti d'ottava formano $^3/_{64}$, e $^3/_8$: ed essendo che $^3/_{64}$: e $^3/_8$ vi sono nell'altra parte: così unite insieme le perdite, ammontano a $^6/_{64}$, e $^6/_8$.

Art V. Nel novantasei agono, per l'articolo XIX la medesimazione è di $^1/_8$ di $^1/_{64}$, e di $^1/_{64}$ di $^1/_8$, che quest' ultima sessantaquattresima importa un terzo quadrato: ed essendo che vi sono 48 triangoli isosceli, che formano 24 paralellogrammi: così $^{24}/_8$ di $^1/_{64}$, e 24 terzi quadrati, ammontano a $^3/_{64}$, e $^3/_8$: ed essendovi dall'altra parte altre tante perdite: così avremo $^6/_{64}$, e $^6/_8$.

Sommate qui appresso tutte le frazioni, che sono dall' esagono fino al novantasei-agono, ammontano a $^4/_8$ del primo quadrato, ed $^1/_{64}$, e $^6/_8$ del secondo.

	Ottave	:	sessantaq.	:	ottave
Art I.	o	:	6 = =	:	6
Art. II.	o	:	6 = =	:	6
Art. III.	o	:	6 = =	:	6
Art. IV.	o	:	6 = =	:	6
Art. V.	o	:	6 = =	:	6
	4	:	1 = =	:	6

Totale di tutti i cinque capitoli, che pienamente ci fa conoscere d' essersi identicamente formati i 26 quadrati di mancanze $^1/_8$, e $^2/_{64}$.

	Quadrati	:	ottave	:	sessant.	:	ottave
Cap. I.	2	:	4	:	2	:	0
Cap. II.	3	:	3	:	0	:	0
Cap. III.	1	:	5	:	4	:	0
Cap. IV.	18	:	0	:	2	:	2
Cap. V.	00	:	4	:	1	:	6
	26	:	1	:	2	:	0

Ed ecco, o signori, sodisfatte le brame di ogni Nazione, di tutte le Accademie, di ciascun matematico, di ciascun filosofo, ed astronomo nell' osservare con evidenza di ragione essersi dimostrata l' identica misura dell' aia del cerchio l' identica periferia, l' identico raggio; l' identica altezza del triangolo equilatero. ch'è mancante di $^{1}/_{8}$, e di $^{1}/_{64}$ relativamente a quella del quadrato: l' identica altezza de' triangoli isosceli, che sono nel ventiquattr' agono, nel quarantott' agono ec e le loro identiche medesimazioni, tanto ne' lati che formano l' angolo opposto alla base, quanto negli angoli alla base, con essersi praticata l' esatta proporzione, sì in rapporto all' altezza, che in rapporto alle medesimazioni: in somma si è dimostrato vero esatto, ed identico, quanto nel volume dell' opera principale, ed in questi riassunti si contiene.

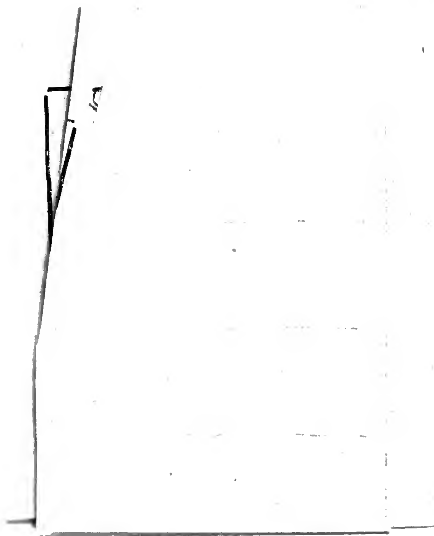
Di vantaggio non si è dimostrato forse, che li 26 quadrati $^{1}/_{8}$, e $^{2}/_{64}$ non sono esistenti; ma sono mancanze risultate da tante, e minute frazioni? E come non dee recarci ammirazione, e stordimento, o signori, che da un libro di minute frazioni, avvenute a cagione de' risecamenti

onde eguagliare le basi de' triangoli isosceli ad un lato di uno de' quadrati, che sono nell' aia del cerchio; e dalle minute frazioni di perdita di altezza, avvenute a causa delle inclinazioni delle linee, che ne' triangoli equilateri, ed isosceli formano gli angoli opposti alle basi; e finalmente dalle minute frazioni, prodotte dalle medesimazioni, e via maggiormente da quelle minute medesimazioni, che sono negli angoli delle basi de' triangoli isosceli del quarantott' agono, e del novantasei-agono; e che da tutte sì fatte frazioni di risecamenti, di inclinazioni di linee, e di medesimazioni, insieme unite, come nell' ultima somma s'osservano, non si compongono forse i 26 quadrati di mancanze $^{1}/_{8}$, e $^{2}/_{64}$? Questo lavoro se non fosse stato coll' analisi esattamente dimostrato, non sarebbe certamente credibile: e quella identica misura che non ottenne il celebre, e sublime Archimede, e Pitagora; ne' tanti celebri, e sublimi matematici antichi, e moderni, l'abbiamo ora col lume Divino ottenuta, e dimostrata (1).

(1) L' origine della Matematica, o signori, è stata appunto come aprirsi un vasto campo onde aversi l'identica misura dell' aia del cerchio: e non già come alcuni asseriscono, che fa l' inondazione del Nilo: acciò dopo il disseccamento delle acque avesse ciascuno conosciuta quella porzione di terreno, che l' apparteneva.

Con approvazione de' Superiori — 29 *Dicembre* 1853.








Biblioteca Nazionale
FONDO
PALATINO
Napoli